

PHIL 103: Logic and Reasoning QR II

Practice #4 Solutions

1. Show the following:  $\{ \} \vdash (\sim P \rightarrow \sim(P \wedge Q))$ .

1	(1)	$\sim P$	A (for CP)
2	(2)	$(P \wedge Q)$	A*
2	(3)	$P$	2 $\wedge$ E
1	(4)	$((P \wedge Q) \rightarrow \sim P)$	1 $\rightarrow$ I
	(5)	$((P \wedge Q) \rightarrow P)$	2,3 CP
1	(6)	$\sim(P \wedge Q)$	4,5 $\sim$ I
	(7)	$(\sim P \rightarrow \sim(P \wedge Q))$	1,6 CP

2. Show the following:  $\{ (P \rightarrow \sim Q), (\sim R \rightarrow Q) \} \vdash (P \rightarrow R)$ .

1	(1)	$(P \rightarrow \sim Q)$	A
2	(2)	$(\sim R \rightarrow Q)$	A
3	(3)	$P$	A (for CP)
1,3	(4)	$\sim Q$	1,3 $\rightarrow$ E
1,3	(5)	$(\sim R \rightarrow \sim Q)$	4 $\rightarrow$ I
1,2,3	(6)	$\sim \sim R$	2,5 $\sim$ I
1,2,3	(7)	$R$	6 $\sim$ E
1,2	(8)	$(P \rightarrow R)$	3,7 CP

3. Show the following:  $\{ ((P \rightarrow Q) \rightarrow R) \} \vdash (Q \rightarrow R)$ .

1	(1)	$((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$	A
2	(2)	$Q$	A (for CP)
2	(3)	$(P \rightarrow Q)$	2 $\rightarrow$ I
1,2	(4)	$R$	1,3 $\rightarrow$ E
1	(5)	$(Q \rightarrow R)$	2,4 CP

4. Show the following:  $\{ P, Q \} \vdash \sim(P \rightarrow \sim Q)$ .

1	(1)	$P$	A
2	(2)	$Q$	A
3	(3)	$(P \rightarrow \sim Q)$	A*
1,3	(4)	$\sim Q$	1,3 $\rightarrow$ E
1	(5)	$((P \rightarrow \sim Q) \rightarrow \sim Q)$	3,4 CP
2	(6)	$((P \rightarrow \sim Q) \rightarrow Q)$	2 $\rightarrow$ I
1,2	(7)	$\sim(P \rightarrow \sim Q)$	5,6 $\sim$ I

5. Show the following:  $\{ (P \vee Q), \sim P \} \vdash Q$ . This is sometimes called “disjunctive syllogism.” Denote the rule of disjunctive syllogism, DS.

1	(1)	$(P \vee Q)$	A
2	(2)	$\sim P$	A
3	(3)	$P$	A (for CP)
2	(4)	$(\sim Q \rightarrow \sim P)$	2 $\rightarrow$ I
3	(5)	$(\sim Q \rightarrow P)$	3 $\rightarrow$ I
2,3	(6)	$\sim\sim Q$	4,5 $\sim$ I
2,3	(7)	$Q$	6 $\sim$ E
2	(8)	$(P \rightarrow Q)$	3,7 CP
9	(9)	$Q$	A (for CP)
	(10)	$(Q \rightarrow Q)$	9 CP
1,2	(11)	$Q$	1,8,10 VE

6. Show the following:  $\{ \} \vdash (P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)))$ .

1	(1)	$P$	A (for CP)
2	(2)	$Q$	A (for CP)
1,2	(3)	$(P \wedge Q)$	1,2 $\wedge$ I
1	(4)	$(Q \rightarrow (P \wedge Q))$	2,3 CP
	(5)	$(P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q)))$	1,4 CP

7. Show the following:  $\{ (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \} \vdash (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$ .

1	(1)	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$	A
2	(2)	$Q$	A (for CP)
3	(3)	$P$	A (for CP)
1,3	(4)	$(Q \rightarrow R)$	1,3 $\rightarrow$ E
1,2,3	(5)	$R$	2,4 $\rightarrow$ E
1,2	(6)	$(P \rightarrow R)$	3,5 CP
1	(7)	$(Q \rightarrow (P \rightarrow R))$	2,6 CP

8. Show the following:  $\{ \} \vdash ((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$ .

1	(1)	$\sim(P \rightarrow Q)$	A (for CP)
2	(2)	$Q$	A (for CP)
2	(3)	$(P \rightarrow Q)$	2 $\rightarrow$ I
1	(4)	$(\sim P \rightarrow \sim(P \rightarrow Q))$	1 $\rightarrow$ I
2	(5)	$(\sim P \rightarrow (P \rightarrow Q))$	3 $\rightarrow$ I
1,2	(6)	$\sim\sim P$	4,5 $\sim$ I
1,2	(7)	$P$	6 $\sim$ E
1	(8)	$(Q \rightarrow P)$	2,7 CP
	(9)	$(\sim(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$	1,8 CP
	(10)	$((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	9 $\vee$ I

9. Show the following:  $\{ (\sim P \vee \sim Q) \} \vdash \sim(P \wedge Q)$ .

1	(1)	$(\sim P \vee \sim Q)$	A
2	(2)	$(P \wedge Q)$	A*
3	(3)	$\sim P$	A (for CP)
2	(4)	$P$	2 $\wedge$ E
3	(5)	$((P \wedge Q) \rightarrow \sim P)$	3 $\rightarrow$ I
	(6)	$((P \wedge Q) \rightarrow P)$	2,4 CP
3	(7)	$\sim(P \wedge Q)$	5,6 $\sim$ I
	(8)	$(\sim P \rightarrow \sim(P \wedge Q))$	2,7 CP
9	(9)	$\sim Q$	A (for CP)
2	(10)	$Q$	2 $\wedge$ E
9	(11)	$((P \wedge Q) \rightarrow \sim Q)$	9 $\rightarrow$ I
	(12)	$((P \wedge Q) \rightarrow Q)$	2,10 CP
9	(13)	$\sim(P \wedge Q)$	11,12 $\sim$ I
	(14)	$(\sim Q \rightarrow \sim(P \wedge Q))$	9,13 CP
1	(15)	$\sim(P \wedge Q)$	1,8,14 $\vee$ E

10. Show the following:  $\{ (\sim P \wedge \sim Q) \} \vdash \sim(P \vee Q)$ .

1	(1)	$(\sim P \wedge \sim Q)$	A
2	(2)	$(P \vee Q)$	A*
1	(3)	$\sim P$	1 $\wedge$ E
1,2	(4)	$Q$	2,3 DS [see 5]
1	(5)	$\sim Q$	1 $\wedge$ E
1	(6)	$((P \vee Q) \rightarrow Q)$	2,4 CP
1	(7)	$((P \vee Q) \rightarrow \sim Q)$	5 $\rightarrow$ I
1	(8)	$\sim(P \vee Q)$	6,7 $\sim$ I